ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

2ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική.
α) Να βρεθούν το εσωτερικό, η κλειστή θήκη και το παράγωγο σύνολο καθενός από τα παρακάτω σύνολα:
$A = (0,1] \cup \{2,3\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\Gamma = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\Delta = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$.
β) Να βρεθεί $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $E' = \mathbb{N}$.
γ) Να γράψετε το σύνολο $\mathbb{Q}$ ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων και το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.

2) Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τη συνήθη (ευκλείδεια) μετρική.
α) Να βρεθούν το εσωτερικό, η κλειστή θήκη και το παράγωγο σύνολο καθενός από τα παρακάτω σύνολα.
$A = (0,1) \times \{0\}$, $B = \{(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$,
$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
β) Να δείξετε ότι το σύνολο $\{(x, \dfrac{1}{x}) : x \neq 0\}$ είναι κλειστό (μπορείτε να το αποδείξετε με χρήση ακολουθιών).

3) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X με $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $U \cap A \neq \emptyset$.

4) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
(i) Το G είναι ανοικτό.
(ii) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.
(iii) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.
(Υπόδειξη: Για τη συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i), εφαρμόστε την (iii) για $A = X \setminus G$).

5) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X με $x_n \to x$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό.

6) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $A, B \subseteq X$. Δείξτε ότι:
(i) $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
(ii) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A' \subseteq A$.
(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A' \subseteq B'$.
(iv) Το A' είναι κλειστό υποσύνολο του X.
(v) Αν $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$ τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.
(vi) $A'' \subseteq A'$. Να δοθεί παράδειγμα (στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική) όπου ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

7) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και A, B δυο μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι
$\rho(\overline{A}, \overline{B}) = \rho(A, B)$.

8) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και A, B δυο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A) + \rho(x,B)}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι καλά ορισμένη, συνεχής με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$ και ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.
β) Να δείξετε ότι υπάρχουν U, V ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, ώστε $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$.